1. (a) Keress egy fában $O(n)$ időben egy leghosszabb utat!

(b) Keress egy fában $O(n^2)$ időben két pontdiszjunkt utat, amelyek hosszának szorzata maximális!

2. Legyen G egy m élű összefüggő irányítatlan gráf. Adj $O(n+m)$ idejű algoritmust, amely megcímkézi az éleket az $1,\dots,m$ számokkal úgy, hogy minden számot pontosan egyszer használ fel, és minden legalább 2 fokszámú csúcsnál a rá illeszkedő élek címkéinek legnagyobb közös osztója 1!

3. Adott egy n csúcsú fa és a csúcsain egy c súlyfüggvény. Adjuk meg $O(n)$ idejű algoritmussal a maximális súlyú független ponthalmaz súlyát!

4. Egy *kaktuszgráf* olyan irányítatlan gráf, amelynek minden éle legfeljebb egy körhöz tartozik.

(a) Lássuk be, hogy egy kaktuszgráf minden körében pontosan egy visszaél van a mélységi bejárás fájára nézve!

(b) Adjunk $O(n+m)$ idejű algoritmust, ami megadja egy kaktuszgráf leghosszabb körének a hosszát!

5. Mutassuk meg, hogy minden bináris fában a (nem-gyökér) levelek száma pontosan eggyel több, mint azon csúcsok száma, amelyeknek 2 gyereke van!

6. Egy bináris keresőfa csúcsait egy, a gyökértől egy levélig menő út szerint három osztályba soroljuk: B az úttól balra levő, U az útra eső, J pedig az úttól jobbra levő csúcsok halmazát jelöli. Igaz-e mindig, hogy minden B-beli csúcs kulcsa kisebb tetszőleges U-beli csúcs kulcsánál, és minden U-beli csúcs kulcsa kisebb, mint tetszőleges J-beli csúcs kulcsa?

7. Adott egy n különböző számot tartalmazó bináris keresőfa. Keresd meg egy adott x értékhez legközelebbi eleme(it) a fának $O(k)$ lépésben, ahol k a keresőfa mélysége!

Házi feladatok:

8. (2 pont) Bizonyítsuk be, hogy bármely, az $1,2,\dots,n$ kulcsokat tartalmazó n csúcsú bináris keresőfa billentésekkel átalakítható bármely, szintén az $1,2,\dots,n$ kulcsokat tartalmazó bináris keresőfává!

9. (2 pont) Adj $O(n+m)$ idejű algoritmust, amely megadja egy irányítatlan gráfnak azt a csúcsát, amelyet elhagyva a legtöbb komponens keletkezik!