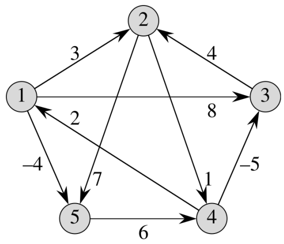
1. Néhány barát találkozni akar. Sajnos mind különböző városban élnek, amelyek között vagy van összeköttetés, vagy nincs. Abban egyeznek meg, hogy azt a várost fogják választani, amelyikbe az utazások átlagos költsége minimális lesz. Adj polinomiális algoritmust a város kiválasztására!

2. Péter és Jancsi egy házban laknak. Jancsi elkíséri Pétert a postára, ami 10 perc sétára van a lakásuktól. Utána Jancsinak el kell mennie a piacra, mely 15 percre van a postától. A piactól 10 perc séta a mozi. Péter a posta után a Széll Kálmán téren találkozik Eszterrel, ahova Péter 30 percet utazik a 6-os villamossal. Eszter a 18-as villamossal 20 perc alatt ér ide. Jancsinak ma van a névnapja, ezért valamilyen meglepetést keresnek neki a Mammutban. Észre sem veszik, hogy közben negyven perc is eltelt. Gyorsan rohannak ki az áruház elé. Julcsi már itt vár rájuk. Pedig szegény nagyon sietett, ugyanis két busszal is kellett utaznia. Az elsővel 30, a másodikkal 20 percet. Szerencsére csak 10 percre van tőlük a mozi. Hány órára érkezhetnek legkorábban a moziba, ha mindenki 3-kor indult otthonról?

3. Adott egy élsúlyozott irányított gráf és egy s pontja, ahonnan a gráf minden pontja elérhető. Adjuk meg $O(m \cdot k)$ időben a gráf minden v pontjára a legrövidebb, legfeljebb k élű sv-séta hosszát!

4. Keressünk a következő gráfban legrövidebb utat minden pontból minden pontba Johnson algoritmusával!



5. Tegyük fel, hogy G egy olyan irányítatlan gráf, amelynek minden (akárhonnét induló, akármilyen sorrendű) mélységi bejárása egy, a gyökérből induló $n-1$ hosszú út. Mi a legnagyobb k, amire G biztosan k-összefüggő?

6. Egy irányítatlan gráf mélységi bejárása során minden faélet irányítsunk a gyerekek felé, a többi élet visszafelé. $sz(v)$ jelentse egy v csúcs távolágát a gyökértől, míg $f(v)$ jelentse a minimális $sz(u)$-t, amire létezik egy legfeljebb egy nem fa-élet használó $v \to u$ út (azaz $f(v)$ a v gyökerű részfából a legmagasabbra felmutató él végpontjának szintje). Határozd meg $O(n+m)$ időben az sz és az f függvényt!

7. Adj $O(n+m)$ idejű algoritmust, amely megadja, hogy egy irányítatlan gráf

(a) 2-élösszefüggő-e,

(b) 2-összefüggő-e.

És hogy találjuk meg az elvágó éleket illetve pontokat?

8. Hogyan használhatjuk fel az előbbieket a 2-összefüggő blokkok meghatározására?

9. Lássuk be, hogy egy irányítatlan gráfnak pontosan akkor létezik erősen összefüggő irányítása, ha 2-élösszefüggő! Adjunk továbbá $O(n+m)$ idejű algoritmust, ami egy 2-élösszefüggő irányítatlan gráfnak megadja egy erősen összefüggő irányítását!

Házi feladatok:

10. (2 pont) Adott egy G gráf pozitív élsúlyozással. Adj $O(m \log n)$ idejű algoritmust, amely megtalálja egy s és egy t csúcs között a **második** legrövidebb sétát – vagyis egy olyan $s-t$ sétát, amelyik a legrövidebbnél hosszabb séták között a legrövidebb!

11. (1 pont) Adottak a $D_1, \ldots, D_n$ dobozok, ahol D_i mérete $x_i \times y_i \times z_i$. Adjunk $O(n^2)$ idejű algoritmust dobozok egy olyan leghosszabb $(D_{i_1}, \ldots, D_{i_k})$ sorozatának megtalálásra, ahol D_{i_j} belerakható $D_{i_{j+1}}$-be minden $1 \leq j \leq k-1$ esetén. (Aki szeretné, csinálja az egyszerűbb verziót, hogy nem szabad átlósan forgatni a dobozokat, aki vállalkozó kedvű, az megpróbálhatja a nehezebb verziót, hogy a dobozok tetszőlegesen elforgathatók.)