1. Valaki adott nekünk egy $2^k - 1$ csúcsot tartalmazó kiegyensúlyozott bináris keresőfát (vagyis egy teljes k szintes bináris keresőfát 2^{k-1} levéllel). Ennek csúcsaiba az $1, \ldots, 2^k$ számokat rakta bele, ám pontosan egyet kihagyott. Adj $O(k)$ futásidejű algoritmust, amelyik megtalálja a kihagyott elemet!

2. Mit kapunk, ha az $1, 2, \ldots, 2^k - 1$ kulcsokat egymás után beszúrjuk egy üres

(a) bináris keresőfába,

(b) AVL-fába?

3. Határozzunk meg a következő páros gráfban egy stabil párosítást a Gale–Shapley-algoritmussal! A fiúkat $f_1, \ldots, f_6$, a lányokat $l_1, \ldots, l_4$ jelöli, preferencialistáik a következők.

f_1: l_3, l_1, l_2

f_2: l_2

f_3: l_4, l_2, l_1

f_4: l_2, l_3, l_4

f_5 : l_3, l_1

f_6: l_4, l_1, l_3

l_1: f_5, f_1, f_6, f_3

l_2: f_3, f_1, f_2, f_4

l_3: f_6, f_4, f_5, f_1

l_4: f_3, f_6, f_4

4. Bizonyítsuk be, hogy a Gale–Shapley-algoritmus mindig stabil párosítást ad!

5. Lehetséges-e, hogy egy stabil párosításban mindenki a számára második legjobb párt kapja?

6. Mutassuk meg, hogy egy (nem feltétlenül teljes) páros gráfban minden stabil párosításban ugyanazoknak a csúcsoknak van párja!

7. Egy fiú és egy lány utolsók egymás listáján, mégis van olyan stabil párosítás, ahol összetartoznak. Létezhet olyan stabil párosítás is, ahol nem?

8. Írjuk a fiúk preferencia-sorrendjét egy $n \times n$-es táblázatba úgy, hogy az i-edik oszlopba írjuk az i-edik legkedvesebb lány sorszámát. Tegyük fel, hogy minden oszlopban előfordul az összes lány sorszáma. Ilyenkor az egyes oszlopok egy-egy párosítást határoznak meg. Milyen feltételnek kell teljesülnie a lányok preferenciáira, hogy ezek a párosítások mind stabilak legyenek?

Házi feladatok:

9. (1,5 pont) Adott a síkon n pont, amelyek minden koordinátája eltérő. Bizonyítsuk, hogy csak egyetlen bináris fa létezik, amely csúcsaiban tárolja a pontokat, és az első koordináta szerint keresőfa, míg a második szerint kupacrendezett. Adj is algoritmust, amely felépíti ezt a fát!

10. (1,5 pont) Lássuk be, hogy egy d mélységű AVL-fában minden levél mélysége legalább $\lceil d/2 \rceil$. Mutassuk meg azt is, hogy ez a korlát éles, azaz minden d-re létezik d mélységű AVL-fa $\lceil d/2 \rceil$ mélységű levéllel! (Egy levél mélysége a gyökértől való távolsága.)